文章编号：1000－7598 (2011) 08－2544－05

一种改进步长自调的非连续变形分析法

刘永茜，杨 军

（北京理工大学 爆炸科学与技术国家重点实验室，北京 100081）

摘 要：非连续变形分析（DDA）是一种针对块体系统变形和位移求解的数值计算方法。引入 Newmark 方法于结构动力学微分方程中，考虑惯性力和阻尼力作用，改进时间步长自动调节，并实现 DDA 求解程序；比较研究 Newmark 方法中的线性加速法、常加速法和平均加速法在 DDA 程序中计算的收敛速度，讨论块体系统动力学计算过程中 DDA 方法对惯性力和阻尼力的添加和删除，并提出根据计算精度要求的误差控制实现方案。将改进的 DDA 方法模拟一个典型的煤与瓦斯突出过程，取得了满意的计算结果，该改进算法为 DDA 方法处理动力学问题提供新的途径。

关 键 词：非连续变形分析；Newmark 积分；动力学分析；阻尼计算；数值模拟

中图分类号：O 342 **文献标识码：**A

An improved DDA method with adaptive step size

LIU Yong-qian, YANG Jun

(State Key Laboratory of Explosion Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: Discontinuous deformation analysis (DDA) is an efficient algorithm for calculating block system deformation and displacement. Citing Newmark integration in the structural dynamic differential equation and considering inertia force and damping force computation, DDA source code is improved so as to optimize adaptive step size. The convergence rates of linear acceleration method, constant acceleration method and average acceleration method in Newmark integration are investigated by comparative analysis; the principle of adding or deleting non-balance force is introduced; and a scheme is given to control the error range. Using the improved DDA method to simulate a coal and gas outburst during a coal seam excavating, the results have a good match with the investigation data. The improved DDA method with adaptive step size can provide a new way to deal with the dynamic calculation for block system.

Key words: discontinuous deformation analysis; Newmark integration; dynamic analysis; damping calculation; numerical simulation

1 引 言

非连续变形分析（DDA）方法是一种典型的离散型数值方法。DDA 方法针对不连续块体系统的静力学和动力学行为求解，能够对块体系统的失稳破坏及其后续运动进行全过程模拟[1]。依靠自身独特的计算优势，DDA 方法在短短几十年内理论得到不断完善，并且广泛应用于水利、矿山、土建以及城市地下交通等诸多工程领域，逐渐成为一种解决散体系统稳定性分析、安全性评价的有力工具。

传统的 DDA 方法计算静态问题时，假定每一时间步初始速度为 0，对于动力学问题计算则通过设定动力学系数的大小对上一步动能部分继承[2−4]。对准静态问题 DDA 求解，如果在块体发生位移变形后不消耗其动能，则系统将会发生振荡，且其振型不确定，而改进的 DDA 方法在总体平衡方程中引入了惯性力项，考虑惯性力和阻尼力作用，并引入质量矩阵和阻尼矩阵，采用动力学分析和时步积分技术求解块体系统的位移和变形，其求解方程为二阶常微分方程组。本文针对块体系统的动力学求解，依据阻尼力在不同计算阶段的诱发和影响因素，在低速运动阶段采用惯性阻尼计算法则，高速运动阶段采用黏性阻尼计算法则。惯性力和阻尼力的计算精度是一个难题，为提高计算精度并加速开-闭迭代的收敛，在 DDA 程序中设计了计算误差控制条件，采用 Newmark 积分方案改进 DDA 方法，实现

收稿日期：2010-03-19
基金项目：爆炸科学与技术国家重点实验室（北京理工大学）自主课题资助（No. ZDKT08-03e）。
第一作者简介：刘永茜，男，1984 年生，博士，主要从事能源安全科学技术和工程数值仿真计算研究。E-mail: yqliu518@126.com

了 Newmark 积分的时间步长自调功能，进一步提高了 DDA 方法对块体系统动力学问题的求解能力。

2　块体变形的 DDA 方法计算

对设定形心坐标点为 $i(x_0,y_0)$，任意块体单元的位移和应变以增量形式表示为[5]

$$[\Delta D_i]=(\Delta u_0 \quad \Delta v_0 \quad \Delta r_0 \quad \Delta\varepsilon_x \quad \Delta\varepsilon_y \quad \Delta\gamma_{xy})^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

其中，任意块体单元的位移增量表示为[5]

$$\begin{pmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{pmatrix}=[T_i][\Delta D_i] \tag{2}$$

式中：$\begin{pmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{pmatrix}$ 为点 $i(x_0,y_0)$ 的刚体位移；Δr_0 为块体绕点 i 的转动角；$\Delta\varepsilon_x$、$\Delta\varepsilon_y$ 为块体的法向应变；$\Delta\gamma_{xy}$ 为块体的切向应变；$[T_i]$ 为块体单元的形函数矩阵

$$[T_i]=\begin{pmatrix}1 & 0 & -(y-y_0) & (x-x_0) & 0 & \dfrac{(y-y_0)}{2}\\ 0 & 1 & (x-x_0) & 0 & (y-y_0) & \dfrac{(x-x_0)}{2}\end{pmatrix}$$

根据有限元理论，利用几何方程可求得块体单元应变增量为[6]

$$[\Delta\varepsilon_i]=[L_i][T_i][\Delta D_i]=[B_i][\Delta D_i] \tag{3}$$

式中：$[L_i]$ 为微分算子，$[L_i]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix}$；$[B_i]$ 为应变矩阵。块体系统的位移和变形为系统单元的累积。

3　基于 Newmark 积分的动力学求解

3.1　DDA 方法的动力学方程

利用 Newmark 方法求解块体系统的动力学响应，以多自由度动力微分方程为基础，在任意时刻 t（第 n 步计算）关于时间离散化，可表示为

$$[M^{\mathrm{e}}][\ddot{D}_n]+[C^{\mathrm{e}}][\dot{D}_n]+[K^{\mathrm{e}}][D_n]=[F^{\mathrm{e}}] \tag{4}$$

式中：$[M^{\mathrm{e}}]$、$[C^{\mathrm{e}}]$、$[K^{\mathrm{e}}]$ 分别为单元块体的质量矩阵、黏性阻尼矩阵和刚度矩阵；$[\ddot{D}_n]$、$[\dot{D}_n]$、$[D_n]$ 分别为 t 时刻块体的加速度、速度和位移；$[F^{\mathrm{e}}]$ 为 t 时刻块体外载荷力矩阵。

系统的质量矩阵 $[M]$、黏性阻尼矩阵 $[C]$、刚度矩阵 $[K]$ 和外载荷力矩阵 $[F]$ 分别是块体单元质量矩阵、黏性阻尼矩阵、刚度矩阵和外载荷力矩阵的累加，可表示为：$[M]=\sum_{\mathrm{e}}[M^{\mathrm{e}}]$，$[C]=\sum_{\mathrm{e}}[C^{\mathrm{e}}]$，$[K]=\sum_{\mathrm{e}}[K^{\mathrm{e}}]$，$[F]=\sum_{\mathrm{e}}[F^{\mathrm{e}}]$。

3.2　DDA 方法的 Newmark 积分求解

假定在第 $n+1$ 步（时间差为 Δt），在 $[t,t+\Delta t]$ 时间内的加速度为介于 $[\ddot{D}_n]$ 与 $[\ddot{D}_{n+1}]$ 之间的某一常数 δ，满足

$$[\ddot{D}]=[\ddot{D}_n]+\delta([\ddot{D}_{n+1}]-[\ddot{D}_n]),\ 0\leqslant\delta\leqslant1 \tag{5}$$

以 $[\ddot{D}_{n+1}]$ 处为原点进行泰勒级数展开

$$\begin{aligned}[\dot{D}_{n+1}]&=[\dot{D}_n]+[\ddot{D}]\Delta t=\\ &[\dot{D}_n]+(1-\delta)[\ddot{D}_n]\Delta t+\delta[\ddot{D}_{n+1}]\Delta t\end{aligned} \tag{6}$$

同样以 $[D_{n+1}]$ 处为原点进行泰勒级数展开

$$[D_{n+1}]=[D_n]+[\dot{D}_n]\Delta t+\frac{[\ddot{D}](\Delta t)^2}{2} \tag{7}$$

设定另一个参数 ξ，同样满足

$$[\ddot{D}]=[\ddot{D}_n]+2\xi([\ddot{D}_{n+1}]-[\ddot{D}_n]),\ 0\leqslant\xi\leqslant1/2 \tag{8}$$

将式（8）代入式（7），可得

$$[\ddot{D}_{n+1}]=\frac{[D_{n+1}]-[D_n]}{\xi(\Delta t)^2}-\frac{[\dot{D}_n]}{\xi\Delta t}-\left(\frac{1}{2\xi}-1\right)[\ddot{D}_n] \tag{9}$$

将式（9）代入式（6）得到

$$\begin{aligned}[\dot{D}_{n+1}]=&\frac{\delta}{\xi\Delta t}([D_{n+1}]-[D_n])+\left(1-\frac{\delta}{\xi}\right)[\dot{D}_n]+\\ &\left(1-\frac{\delta}{2\xi}\right)\Delta t[\ddot{D}_n]\end{aligned} \tag{10}$$

计算时步从第 n 步到第 $n+1$ 步，令位移增量为 $[\Delta D]=[D_{n+1}]-[D_n]$，初始速度 $[\dot{D}_n]=[V_0]$，初始加速度 $[\ddot{D}_n]=[A_0]$，将式（9）、（10）代入式（4）可得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{[M]}{\xi(\Delta t)^2}+\frac{\delta[C]}{\xi\Delta t}+[K]\right)[\Delta D]=\\ &[F]+[M]\left(\frac{[V_0]}{\xi\Delta t}+\left(\frac{1}{2\xi}-1\right)[A_0]\right)+\\ &[C]\left[\left(\frac{\delta}{\xi}-1\right)[V_0]+\left(\frac{\delta}{2\xi}-1\right)\Delta t[A_0]\right]\end{aligned} \tag{11}$$

DDA 方法可采用不同的 ξ、δ 值组合，得到不同的加速度法的积分方案：取 $\xi=1/4$，$\delta=1/2$，为平均加速度法；取 $\xi=1/6$，$\delta=1/2$，为线性加速度法；取 $\xi=1/2$，$\delta=1$，为常加速度法。当取 $\delta\geqslant1/2$，$\xi\geqslant1/4(\delta+1/2)^2$ 时，Newmark 方法是无条件稳定的[7−8]，时间步长 Δt 的大小不影响解的稳定性，Δt 的选择依据求解精度确定。比较上述几种加速积分方案可知，平均加速法和常加速法是无条

件稳定的，传统的 DDA 方法采用常加速度法求解，时步步长 Δt 不影响 DDA 求解的稳定性。

4 误差控制计算的 DDA 方法

研究上述 Newmark 方法计算精度，以通过局部单一时步计算结果与理论值比较分析。设第 n 步的结果为精确解，与理论值一致，考察第 $n+1$ 步的计算结果与对应理论解的误差，设定步长调整方案。

令 $\ddot{e}$ 、$\dot{e}$ 和 e 分别为计算结果与理论值的加速度误差、速度误差和位移误差，则在时间段 $[t,t+\Delta t]$ 内任意时刻 T 上加速度 $[\ddot{D}_T]$ 满足

$$[\ddot{D}_T]=[\ddot{D}_n]+\frac{[\ddot{D}_{n+1}]-[\ddot{D}_n]}{\Delta t}(T-t) \tag{12}$$

则加速度误差可由式（5）～（12）得到，即

$$\ddot{e}(T)=[\ddot{D}]-[\ddot{D}_T]=\left([\ddot{D}_{n+1}]-[\ddot{D}_n]\right)\left(\delta-\frac{T-t}{\Delta t}\right) \tag{13}$$

则由此可得速度误差为

$$\dot{e}(T)=\int_t^T \ddot{e}(T)\mathrm{d}T \tag{14}$$

同理可得位移误差为

$$e(T)=\int_t^T \dot{e}(T)\mathrm{d}T \tag{15}$$

考虑计算精度需要，设定误差值与对应时步的位移比需满足一定条件，即 $0<\alpha\leqslant e/\Delta D\leqslant\beta<1$，$\alpha$ 和 β 分别为误差与位移比允许的下限值和上限值，与其他控制参数一样，在 DF 文件中预先定义出来。计算结果如果不满足上述条件，系统调整步长，继续求解，DDA 计算流程图见图 1。

DDA 程序设计改进时，在准静态计算阶段（速度低于预定值 V_c），增加惯性力矩求解，假定阻尼力的大小与块体所受的不平衡力成正比，则惯性阻尼力可表示为[9]

$$[F_s]=-\eta_1\rho[T_i][\ddot{D}(0)] \tag{16}$$

在动态计算阶段（速度高于预定值 V_c），施加与速度成正比的黏性阻尼来吸收系统动能，实现计算加速收敛，黏性阻尼力可表示为

$$[F_v]=-\eta_2[T_i][\dot{D}(0)] \tag{17}$$

式中：η_1、η_2 为阻尼系数。计算过程中实现惯性阻尼力向黏性阻尼力的过渡，必须保证阻尼力的连续性，为实现阻尼力计算精度，在过渡点两侧邻近区域设定条件约束，令块体在第 m 时步速度 V_c，阻尼力为 $|F_{s+}|=|F_{v-}|$，阻尼力较第 $m-1$ 步的阻尼力变化 $|\Delta f_s|$，较第 $m+1$ 步的阻尼力变化 $|\Delta f_v|$，则

$$\omega_1\leqslant\frac{|\Delta f_s|}{\left\|F_{s+}|-|\Delta f_s\right\|}\leqslant\omega_2,\quad \omega_1\leqslant\frac{|\Delta f_v|}{|F_{v-}|}\leqslant\omega_2 \tag{18}$$

式中：ω_1、ω_2 为第 m 步前后连续时步阻尼力的变化率，这也需要在 DDA 程序中定义。

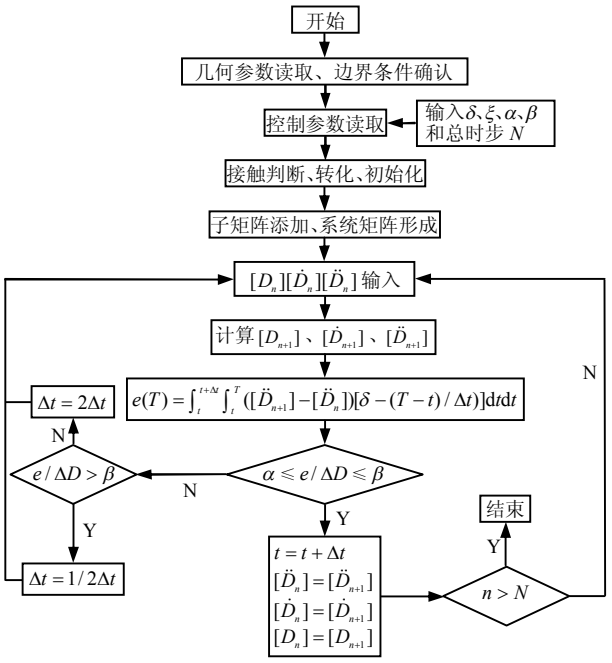


图 1 DDA 计算流程图

Fig.1 Flow diagram of the improved algorithm for DDA

5 实例应用

鹤壁煤电股份有限公司十矿 2003 年 3 月 19 日发生一起小型煤与瓦斯突出，突出位置位于深部采区 1 113 下顺槽的 1 个掘进头，水平标高为 – 550 m，突出煤岩 22 t，瓦斯 2 520 m^3，无人员伤亡。根据瓦斯具体地质条件，建立如图 2 所示模型。模型分为 3 层，中间层为构造煤发育的软煤层，煤层近水平，煤层瓦斯压力为 2.1 MPa，上、下层为坚硬致密顶底板岩层。模型尺寸选取 6 m×10m，共 4 256 个网格单元。顶板施加 13 MPa 的均匀荷载，相当于 550 m 埋深，在掘进头端面中心设定测点。计算模型中材料的力学参数如表 1 所示。

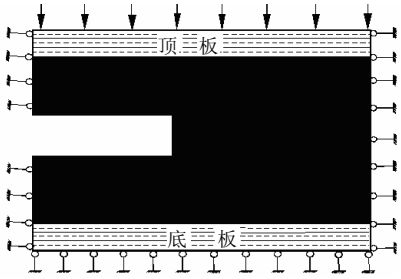


图 2 煤与瓦斯突出数值模型

Fig.2 Numerical model of coal and gas outburst

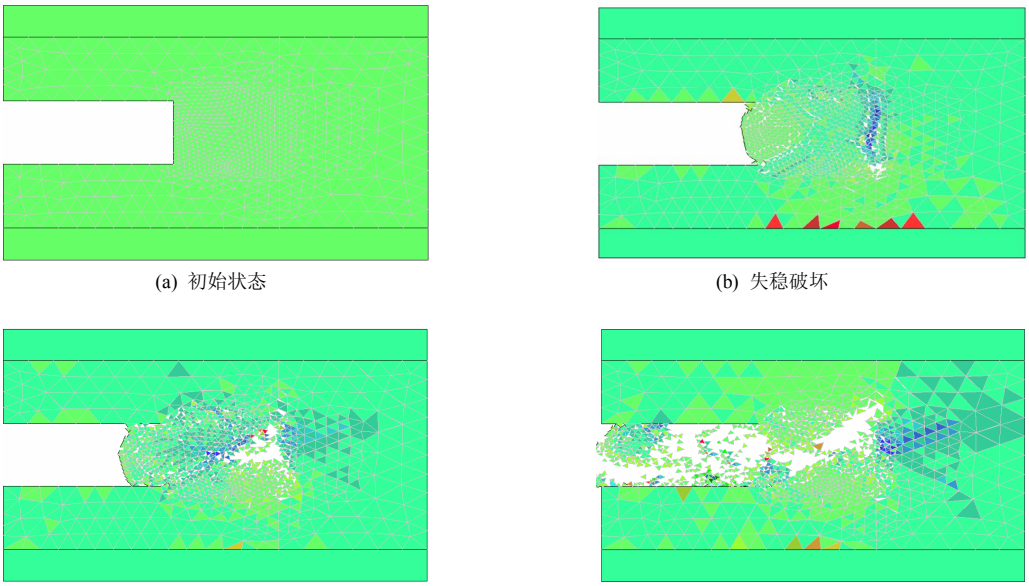
表 1　数值模型力学参数

Table 1　Mechanical parameters for the numerical model

土层名称	内摩擦角 /(°)	泊松比 μ	黏聚力 c / MPa	抗拉强度 σ / MPa	弹性模量 E / GPa	密度ρ /(g/cm^3)
岩层	32	0.23	1.8	1.00	50	2.6
煤层	28	0.25	0.8	0.32	9	1.4

传统 DDA 方法计算中采用常加速度法，比较其他两种加速法（平均加速法和线性加速法）计算发现，影响计算结果的一个重要因素就是计算过程中惯性力和阻尼力的添加或删除，惯性力的添加必然影响阻尼力的作用效果，并控制阻尼转换临界速度 V_c 的到达时步，因此，惯性力的添加和删除决定系统的计算效率和精度，而上述 3 种加速算法对惯性力和阻尼力计算是有差异的。图 3 为采用常加速度法模拟的煤与瓦斯突出过程，再现了采动导致掘进头端面应力的局部集中、煤岩变形、裂隙生成及扩展、煤层瓦斯解吸不断改变局部瓦斯压力和煤（岩）层失稳诱发煤与瓦斯突出过程，模拟结果与球壳失稳理论[10]有很好的吻合，与文献[11]有近似的计算结果，计算数据与事故调查统计一致：在煤与瓦斯突出发生位置，形成孔腔深度约 3.5 m，周围煤层产生大量裂隙，裂隙发育区近似蝶状，破坏煤岩体积为空腔体积数 10 倍，影响半径近 30 m。

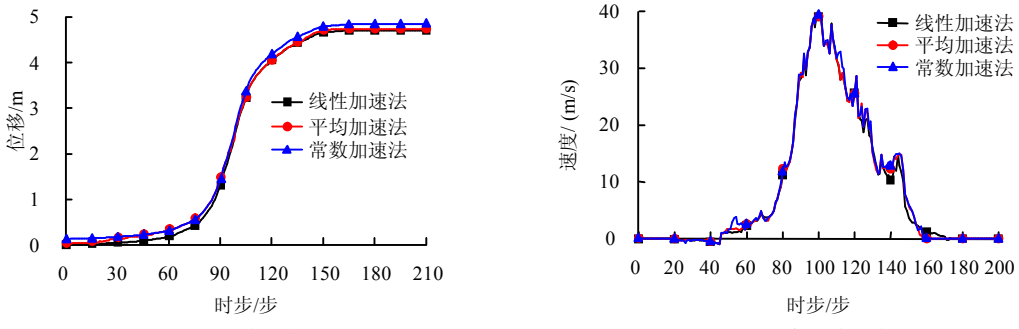
另外，采用平均加速法和线性加速法分别对上述模型进行计算，计算结果显示，采用 Newmark 积分方法的上述 3 种 DDA 算法，有较好的稳定性（如图 4 所示），位移计算相对误差在 5%以内，速度计算相对误差在 7%以内。比较发现，线性加速法的计算收敛速度较慢（第 177 步为收敛时步），常加速法计算收敛速度居中（第 162 步为收敛时步），平均加速法计算收敛速度最快（第 157 步为收敛时步）。



(a) 初始状态　(b) 失稳破坏　(c) 裂隙催化　(d) 激发突出

图 3　煤与瓦斯突出过程

Fig.3　Processes of a coal and gas outburst



(a) 位移-时步曲线　(b) 速度-时步曲线

图 4　几种不同算法的位移和速度比较（水平方向）

Fig.4　Comparisons of displacement and velocity with different algorithms（in horizontal）

6 结 论

采用 Newmark 时步积分技术对块体系统动力学微分方程求解，可计算块体系统的动态非连续变形行为。计算过程中添加惯性力和阻尼力作用，较传统 DDA 算法精度有很大提高，但惯性力和阻尼力计算过程中的系数选取需要合理确定。

DDA 方法计算过程中可对 Newmark 算法中的参数ξ和δ采用优化值组合，提高计算效率，并根据计算精度的要求控制步长范围。从煤与瓦斯突出案例的模拟可知，Newmark 积分算法应用到 DDA 方法中，计算结果稳定，在该算例中，平均加速算法较常加速算法更快，线性加速算法收敛速度最慢。根据具体的计算模型和条件选择合适的算法更有利于提高计算效率。

改进的 DDA 方法对动力学求解精度有较大提高，可为工程施工危险性预测提供理论和数据支持，基于 Newmark 积分改进的 DDA 方法有一定的推广和应用价值。

参 考 文 献

[1] 甯尤军. 动力学破坏问题的DDA方法及其应用研究[D]. 北京: 北京理工大学, 2008.

[2] SHI G H. Discontinuous deformation analysis: A new numerical model for the statics and dynamics of block systems[D]. Berkeley: University of California, 1988.

[3] 石根华. 数值流形方法与非连续变形分析[M]. 裴觉民译. 北京: 清华大学出版社, 1997.

[4] LIN A B, DWYER C J. Recent extensions to the DDA method[C]//Proceedings of the First International Forum on Discontinuous Deformation Analysis (DDA) and Simulations of Discontinuous Media. Albuquerque: TSI Press, 1996: 5－18.

[5] 姜清辉, 周创兵, 漆祖芳. 基于 Newmark 积分方案的 DDA 方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(增刊 1): 2778－2783.
JIANG Qing-hui, ZHOU Chuang-bing, QI Zu-fang. Discontinuous deformation analysis method based on Newmark integration algorithm[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2009, 28(Supp.1): 2778－2783.

[6] 姜清辉, 周创兵. 岩土工程不连续变形分析计算中的若干问题[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(10): 2014－2026.
JIANG Qing-hui, ZHOU Chuang-bing. Some issues in discontinuous deformation analysis(DDA) for geotechnical engineering[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2007, 26(10): 2014－2026.

[7] 王勖成, 邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法(第2版) [M]. 北京: 清华大学出版社, 1996.

[8] NEWMARK N M. A method of computation for structural dynamics[J]. **Journal of Engineering Mechanics Division**, 1959, 85(3): 67－94.

[9] CUNDALL P A. Adaptive density-scaling for time-explicit calculations[C]//Proceedings of the Fourth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics. Rotterdam: A. A. Balkema, 1982: 23－26.

[10] 蒋承林, 俞启香. 煤与瓦斯突出机理的球壳失稳假说[J]. 煤矿安全, 1995, (2): 17－25.
JIANG Cheng-lin, YU Qi-xiang. Spherical shells collapsing hypothesis for coal and gas outburst[J]. **Safety in Coal Mines**, 1995, (2): 17－25.

[11] 徐涛, 杨天鸿, 唐春安, 等. 含瓦斯煤岩破裂过程固气耦合数值模拟[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2005, 26(3): 293－296.
XU Tao, YANG Tian-hong, TANG Chun-an, et al. Numerical simulation on coupled solid-gas flow in failure process of gaseous coal and rock[J]. **Journal of Northeastern University(Natural Science)**, 2005, 26(3): 293－296.